

# 2次元球面上の Euler 乱流に対する統計力学的平衡状態の 新しい数値計算法の提案とその応用

大気科学分科 漁野 光紀 (RYONO, Koki)

## 1 2次元乱流の統計力学的理論とは

地球など回転する惑星上の大規模な流れは非常に薄い流体として見なせる。実際、その水平方向の空間スケールは数千 km にも及ぶのに対し、鉛直方向のスケールは高々数十 km 程度である。惑星自体の回転による Taylor-Proudman 効果も合わせて考えれば、そのような流れを 2次元流体として近似することができる。したがって、2次元流体は回転惑星の上の大規模流れの最も簡単なモデルとなる。一方で、2次元流体の時間発展は極めて複雑であり、それが有する豊富な非線型現象は現在も数学的・物理学的な関心を集めている。特に、減衰性 2次元乱流では流れが乱流化しているにも関わらず、空間的に大きいスケールを持つパターン構造が出現することが知られており、2次元乱流の長時間経過後の最終状態について研究が続けられている。

2次元乱流の最終状態について、いくつかの統計力学的な解釈が提案されてきた。その歴史は [6] に遡る。ここでは、平面上の多数の点渦からなる力学系が Hamilton 系であることを利用し、統計力学の枠組みを適用している。特に、逆温度  $\beta = dS/dE$  ( $S$ : エントロピー、 $E$ : 系のエネルギー) が負の値を持つとき、同符号の点渦が塊となって存在することが指摘された。このような「負の温度」状態の存在はそれ自体が物理的に興味深い結果であるが、その後、2次元流体の時間発展では同符号の渦が合併を繰り返し孤立渦が形成されることが数値計算で明らかとなった [e.g. 3]。[2] および [5] は、複数個の点渦を平面上の各格子点上に分配する場合の数を計算し、状態数が最大となるような状態を考察した。ここでは、格子間隔  $d \rightarrow 0$  の極限を取ることで、点渦が作る渦度の平均場が満たすべき偏微分方程式が導かれており、[6] の理論よりも定量的な結果が得られている。

上述の理論に続いて、[4], [8] はそれぞれ独立に 2次元乱流に対する統計力学的な理論 (MRS 理論) を提案した。それ以前の理論と比較して MRS 理論が新しい点は、渦度パッチの混合をモデル化して理論を構築しているため、より広い範囲の流れに対する統計力学的扱いが可能となっていることである。特に、この特徴は地球流体力学的な流れに対する統計力学的理論の適用を魅力的なものとしており、実際、木星の大赤斑やジェットなどに適用が試されている [e.g. 1]。

だが、MRS 理論において定義される平衡状態は複雑な非線型最適化問題の解として与えられるため、その数値計算が難しいという課題がある。なかでも、球面



上においては帯状な構造を持つ混合エントロピーの鞍点に探索がトラップされることが多く、非帯状な構造を持つ統計力学的平衡状態の計算は難しい。そのため、MRS 理論の地球流体力学への応用は実際にはあまり進んでおらず、特に、具体的な初期渦度場に対する統計力学的平衡状態の計算はほとんど行われていない。本研究では、MRS 理論で定義される平衡状態の渦度場を計算する手法を新たに提案した。

## 2 MRS 理論の概要

以下では流れの領域を単位球面  $S$  とし、 $S$  上の点  $x$  に対する座標を経度  $\lambda$  とサイン緯度  $\mu$  を用いて  $x = (\lambda, \mu)$  で表す。流れは 2次元 Euler 方程式

$$\frac{\partial q}{\partial t} + J(\psi, q) = 0$$

に従うとする。このとき、 $q$  は渦度、 $\psi$  は流線関数であり、 $q = \Delta\psi$  である。初期渦度場は  $K$  個の渦度パッチからなるものとし、 $k$  番目の渦度パッチの渦度の値を  $Q_k$ 、面積を  $S_k$  とする。初期状態から時間発展を開始すると、各流体粒子が持つ渦度の値と渦度パッチの面積は保たれるが、その混合は非常に複雑な様相を呈する。このような乱流化した状況においては、各点において観測される渦度の期待値を考慮することが有効となる。したがって、次のような量を導入する。点  $x \in S$  において  $k$  番目の渦度パッチが観測される確率を  $r_k(x)$  とし、これらによって計算される期待値としての渦度

場を、

$$\bar{q}(x) = \sum_{k=1}^K Q_k r_k(x)$$

とおく。ここで、 $r_1, \dots, r_K$  は区間  $[0, 1]$  に値を取る関数である。すなわち、 $\bar{q}$  は渦度場のほとんど確率的な変動を平滑化して得られる、巨視的な渦度の構造を表す場であり、巨視的渦度場と呼ばれる。また、 $r_1, \dots, r_K$  は巨視的状態と呼び、巨視的状態が確率を表すことと渦度パッチの面積不変性から次の制約条件を満たす。

$$\sum_{k=1}^K r_k(x) = 1 \quad (\forall x \in S)$$

$$\int_S r_k(x) dS = S_k \quad (k = 1, \dots, K)$$

混合エントロピー

$$S_{\text{mix}} = -\frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^K \int_S r_k(x) \log r_k(x) dS$$

を上制約条件および次に述べる力学的な制約条件のもとで最大化する巨視的状態  $r_1, \dots, r_K$  を統計力学的平衡状態と呼ぶ。力学的な制約条件とは、角運動量保存則の条件

$$\frac{1}{4\pi} \int_S \bar{q}(x) \mu dS = M_1^{\text{ini}}$$

$$\frac{1}{4\pi} \int_S \bar{q}(x) \sqrt{1 - \mu^2} \cos \lambda dS = M_2^{\text{ini}}$$

$$\frac{1}{4\pi} \int_S \bar{q}(x) \sqrt{1 - \mu^2} \sin \lambda dS = M_3^{\text{ini}}$$

とエネルギー保存則の条件

$$-\frac{1}{4\pi} \int_S \frac{1}{2} \bar{q}(x) \bar{\psi}(x) dS = E^{\text{ini}}$$

である。ただし、 $\bar{\psi}$  は  $\Delta \bar{\psi} = \bar{q}$  を満たす巨視的流線関数であり、 $M_1^{\text{ini}}, M_2^{\text{ini}}, M_3^{\text{ini}}$  は角運動量の各成分の初期値、 $E^{\text{ini}}$  はエネルギーの初期値である。

以上のように定義された統計力学的平衡状態は、次のような性質を持つことが示されている [7]：渦度場が保存則を満たしつつ混合するとき、統計力学的平衡状態の集合の近傍には、実現可能な渦度場のうち大多数が集中する。この主張の物理的な意味は、流れの混合が十分強く、エルゴード性を満たすと仮定できるとき、渦度場の構造は微視的な変動を除いて巨視的渦度場に近づくということである。ただし、2次元乱流においては、渦度の混合に関するエルゴード性が常に満たされるとは限らないことに注意が必要である [e.g. 10]。

### 3 統計力学的平衡状態の数値計算法

本修士論文における研究では、2つの統計力学的平衡状態の計算手法を提案した [9]。ひとつは、カノニカル問題に対する手法であり、bridge-building method と

呼ばれるものである。もうひとつは、ミクロカノニカル問題に対する手法であり、ここでは「副問題の導入による勾配法」と呼ぶ。

カノニカル問題とは、エネルギー  $E$  の保存に関する制約を除く制約条件のもとで、自由エネルギー  $F_\beta = S_{\text{mix}} - \beta E$  を最大化する巨視的状態を求める問題である。なお、パラメータ  $\beta$  は逆温度と呼ばれる。bridge-building method では、巨視的状態  $r_1, \dots, r_K$  に加えて巨視的渦度場  $\bar{q}$  の球面調和関数展開の展開係数を変数として考える。そして、巨視的状態と展開係数を結びつける Fourier 変換の関係式に関する Lagrange の未定乗数法を応用することで、既知の  $F_\beta$  の臨界点から未知の臨界点を新たに探索することが可能となる。特に、帯状の臨界点がひとつ得られていれば、そこから未知な非帯状の統計力学的平衡状態を計算することができるため、この手法は非帯状な統計力学的平衡状態を数値計算することが難しいという先行研究の手法に共通する難点を克服している。

ミクロカノニカル問題は、前節で説明した通りにエネルギー保存の制約条件を課して混合エントロピー  $S_{\text{mix}}$  を最大化する問題である。この問題の解を求めることへの困難は、エネルギー保存則の制約が非線型制約であること、および不等式制約  $r_k \geq 0$  ( $k = 1, \dots, K$ ) に起因する。そこで、我々の手法では「副問題」を導入し、巨視的状態を  $\bar{q}$  の展開係数に従属して決まると考える。ただし、副問題とは、与えられた展開係数をもつような  $\bar{q}$  を与え、かつエネルギー保存以外の制約条件を満たす巨視的状態  $r_1, \dots, r_K$  のなかで、混合エントロピー  $S_{\text{mix}}$  を最大化するものを求める問題である。球面調和関数展開の切断波数を  $N$  とすると (角運動量保存則によって固定された3個の成分を除き)、副問題の導入により  $(N+1)^2 - 4$  個の成分が独立な変数としてみなされる。このとき、次のことがわかる。(1) エネルギー保存則の制約条件は、展開係数の  $(N+1)^2 - 4$  次元の空間において楕円型の2次超曲面を定義する。(2) 巨視的状態に対する不等式制約は、展開係数の空間における多面体領域  $P$  を定義する。以上のことから、ミクロカノニカル問題において解を探索すべき領域は、展開係数の空間における楕円型の2次超曲面と多面体領域  $P$  の共通部分である。そこで、この共通部分上に点を生成し、それを初期点として超曲面上の勾配法を用いることで、統計力学的平衡状態を探索することが可能となる。なお、共通部分上に点を生成するためには、 $P$  に含まれる閉曲面上で展開係数の1次関数を最大化する問題を解くことなど、幾何学的なテクニックが有用となる。

### 4 数値計算の具体例

前節で述べた統計力学的平衡状態の数値計算法を、具体的な初期渦度場に対して適用し、統計力学的平衡状態を計算した。初期渦度場として、帯状な渦度場

$$q(\lambda, \mu) = 0.07 \times 12P_3(\mu) + 2\mu$$

を用いた。ここで、 $P_3(\mu) = \sqrt{7}(5\mu^3 - 3\mu)/2$  である。これは連続的な渦度場であるが、 $K = 32$  個の Gauss 節点

$\mu_k (k = 1, \dots, K)$  を用いて、渦度の値  $Q_k = q(0, \mu_k)$  を持つ  $K$  個の渦度パッチで離散化する。渦度パッチの面積  $S_k$  は、Gauss 節点  $\mu_k$  に対応する Gauss 重み  $w_k$  に比例するように決める。計算における球面調和関数展開の切断波数は  $N = 21$  とした。

この初期渦度場は、力学的には順圧不安定である。微小な擾乱を加えて時間発展を開始すると不安定による強い混合が生じ、流れは乱流となる。しかし、十分長時間が経過すると、波数 2 型のパターン構造が西向きに剛体回転するような渦度場へと落ち着く (図 1)。

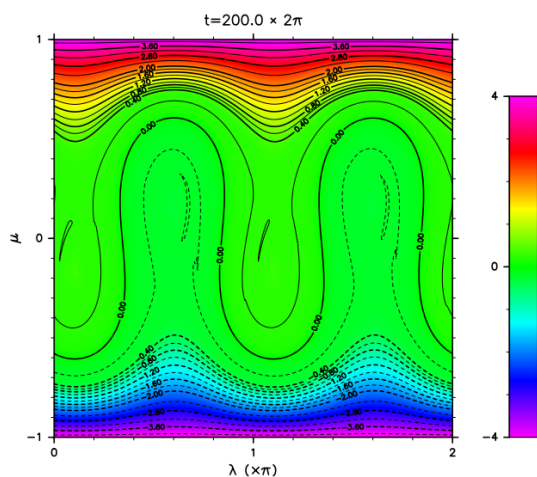


図 1: スペクトル法により計算された初期渦度場からの時間発展における最終状態の渦度場。横軸に経度  $\lambda$  を、縦軸にサイン緯度  $\mu$  を表示している。

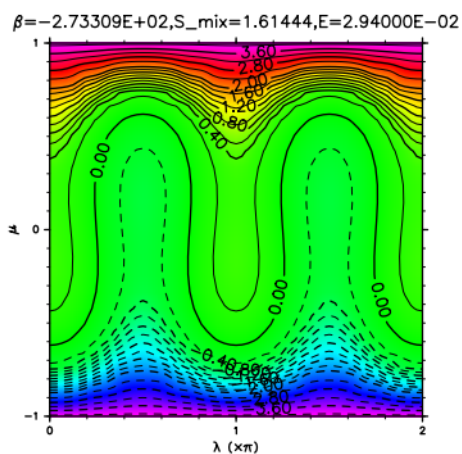


図 2: bridge-building method により計算された統計力学的平衡状態における巨視的渦度場。カラーバーは図 1 と共通なので省略した。

この初期渦度場に対して統計力学的平衡状態を計算した結果を図 2 と図 3 に示す。bridge-building method および副問題の導入による勾配法の双方で、時間発展の結果に近い巨視的渦度場を持つ統計力学的平衡状態が計算できた。

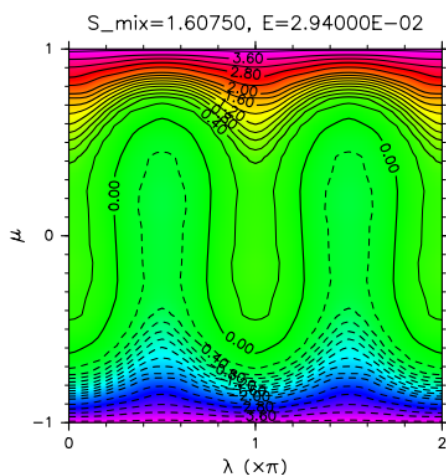


図 3: 副問題の導入による勾配法で計算された統計力学的平衡状態における巨視的渦度場。カラーバーは図 1 と共通なので省略した。

## 5 まとめ

本研究では、MRS 理論において定義される球面上の 2 次元乱流の統計力学的平衡状態を計算する 2 つの新たな手法を提案した。これらの手法は、多くの渦度パッチから構成される初期状態に対しても適用可能であり、さらに非帯状な構造をもつ統計力学的平衡状態の探索にも向いている。これらの手法を応用することにより、これまで計算されてこなかった具体的な統計力学的平衡状態の計算例が蓄積され、地球流体力学への応用も含めて 2 次元乱流の統計力学的理論に対する理解が深まることが期待される。

## 参考文献

- [1] F. Bouchet and J. Sommeria. Emergence of intense jets and Jupiter's Great Red Spot as maximum-entropy structures. *Journal of Fluid Mechanics*, 464:165–207, 2002.
- [2] G. Joyce and D. Montgomery. Negative temperature states for the two-dimensional guiding-centre plasma. *Journal of Plasma Physics*, 10(1):107–121, 1973.
- [3] J. C. McWilliams. The emergence of isolated coherent vortices in turbulent flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 146:21–43, 1984.
- [4] J. Miller. Statistical mechanics of Euler equations in two dimensions. *Physical review letters*, 65(17):2137, 1990.
- [5] D. Montgomery and G. Joyce. Statistical mechanics of “negative temperature” states. *The Physics of Fluids*, 17(6):1139–1145, 1974.
- [6] L. Onsager. Statistical hydrodynamics. *Il Nuovo Cimento (1943-1954)*, 6(2):279–287, 1949.

- [7] R. Robert. A maximum-entropy principle for two-dimensional perfect fluid dynamics. *Journal of Statistical Physics*, 65(3):531–553, 1991.
- [8] R. Robert and J. Sommeria. Statistical equilibrium states for two-dimensional flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 229:291–310, 1991.
- [9] K. Ryono and K. Ishioka. New numerical methods for calculating statistical equilibria of two-dimensional turbulent flows, strictly based on the Miller–Robert–Sommeria theory. *Fluid Dynamics Research*, 54(5):055505, 2022.
- [10] E. Segre and S. Kida. Late states of incompressible 2D decaying vorticity fields. *Fluid dynamics research*, 23(2):89, 1998.